*FORMATION INGENIEUR EN PARTENARIAT AVEC AFTP-PACA*
*SPECIALITE TRAVAUX PUBLICS*

Session 1er avril 2017

# MATHÉMATIQUES

## *Temps conseillé : 1 heure 30*

## Aucun document autorisé, calculatrices interdites.

*AVERTISSEMENT* : Cette épreuve a pour but d'évaluer le niveau atteint par chaque candidat, en tenant compte des différences existant entre les programmes des diverses formations dont ils sont issus.

En particulier il n'est pas nécessaire de répondre à toutes les questions pour obtenir la note maximale : certaines parties de programme spécifique à telle ou telle formation sont abordées tour à tour, l'ensemble étant équilibré.

Les questions sont pour la plupart rédigées de façon à comporter des réponses de niveaux de difficulté croissants. Quelques réponses partielles mais correctes et cohérentes sont donc facilement accessibles dans de nombreux cas et peuvent contribuer à améliorer sensiblement la note finale.

| |
|---|
| Pour chacune des neuf questions il est demandé une ou des réponses précises et concises, à inscrire dans les cadres prévus à cet effet. |

**Question 1** On suppose d'abord que $-\sqrt{\frac{\pi}{2}} < x < \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Simplifier l'expression définissant $f(x)$

$$f(x) = \mathrm{Arc}\sin\left(\sqrt{\frac{1-\cos 4x^2}{4(1+\cos 2x^2)}}\right) =$$

L'ensemble des $x$ tels que $f(x) \leq 1$ définit un intervalle centré $I = [-a, a]$. On a $a =$

On considère ensuite l'équation différentielle $y'(x) \cdot \sqrt{1 - f(x)} - y(x) = 0$ sur l'intervalle $I$.

La solution $y(x)$ de cette équation différentielle telle que $y(0) = 1$ est

$y(x) =$

$y(-a) =$

$y(a) =$

Sur l'intervalle $I$ la solution $y$(x) ci-dessus est (cocher la case utile)

- croissante ☐
- décroissante ☐
- ni l'un ni l'autre ☐

**Question 2** Pour $x > 0$ on pose $f(x) = x^{\mathrm{Arc}\tan x}$.

La dérivée de $f(x)$ est $f'(x) =$

On suppose $0 < x < 1$. Cocher les cases correspondant aux inégalités qui sont vérifiées

| | | |
|---|---|---|
| $0 < \frac{1}{1+x^2} < 1$ ☐ | $x < \mathrm{Arc}\tan x$ ☐ | $\mathrm{Arc}\tan x < x$ ☐ |
| $\mathrm{Arc}\tan x \cdot \ln x < x \cdot \ln x$ ☐ | $x \cdot \ln x < \mathrm{Arc}\tan x \cdot \ln x$ ☐ | $x \cdot \mathrm{Arc}\tan x < x \cdot \ln x$ ☐ |

$\lim_{x \to 0} (x \cdot \ln x) =$

$\lim_{x \to 0} (\mathrm{Arc}\tan x \cdot \ln x) =$

$\lim_{x \to 0} f(x) =$

**Question 3** On considère dans le plan complexe la transformation qui associe au point d'affixe $z \neq -1+i$ le point d'affixe $Z = \dfrac{1}{z+1-i}$ .

($a$) - Soient $z = x + iy$ , $Z = X + iY$ les formes cartésiennes de $z$ et $Z$.
Calculer la partie réelle $X$ et la partie imaginaire $Y$ de $Z$ en fonction de $x$ et de $y$ .

$X =$

$Y =$

$X^2 + Y^2 =$

($b$) - On considère la droite $\Delta$ définie par $z = x(1-i)$. On note $L_\Delta$ le lieu géométrique décrit par le point d'affixe $Z$ lorsque le point d'affixe $z$ parcourt $\Delta$ pour $x \neq$ -1. Dessiner $\Delta$ , puis $L_\Delta$ sur la figure ci-dessous.

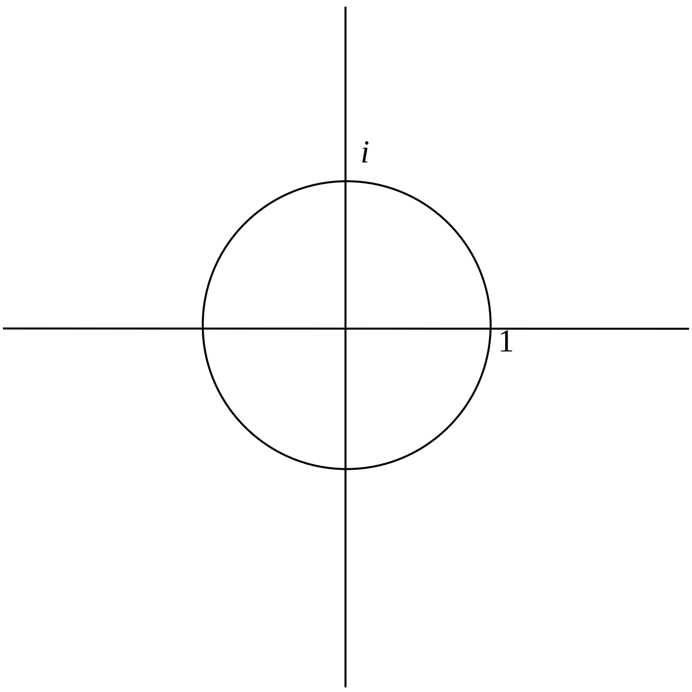
($c$) - On note $L_{C_R}$ le lieu géométrique décrit par le point d'affixe $z$ lorsque le point d'affixe $Z$ parcourt le cercle $C_R$ de centre O et de rayon $R$.

Préciser les caractéristiques permettant de tracer $L_{C_R}$

Nature de $L_{C_R}$

Caractéristiques

Dessiner $C_R$ et $L_{C_R}$ sur la figure ci-dessous pour $R = 1$ et $R = 2$ (donc $C_1$, $C_2$, $L_{C_1}$ et $L_{C_2}$ ).



**Question 4** La décomposition en somme de fractions simples donne

$$\frac{2x^2 - 13x + 15}{(x^2 - x - 2)\ (x^2 - 4x + 5)} =$$

On en déduit, pour $t \geq 3$, la primitive suivante

$$F(t) = \int_3^t \frac{2x^2 - 13x + 15}{(x^2 - x - 2)\ (x^2 - 4x + 5)}\, dx =$$

$F(3) =$

$\lim\limits_{t \to \infty} F(t) =$

Sur $[3, +\infty[$ $F$ passe par un extremum en un certain $t_0$ : $t_0 =$ .

L'extremum est un
- minimum ☐
- maximum ☐

(cocher la case utile).

**Question 5** On considère l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = f(x)$.

Pour $f(x) = 0$ la solution générale est

$y(x) =$

Pour $f(x) = e^x \cos x$ la solution telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ est

$y(x) =$

**Question 6** On considère l'équation différentielle :

$$\left(x^2 + 1\right) \cdot y'(x) - (2x + 1) \cdot y(x) = f(x)$$

Pour $f(x) = 0$ la solution générale est

$y(x) =$

Pour $f(x) = (1+x^2)\, e^{\operatorname{Arctan} x}$ la solution telle que $y(0) = 1$ est

| |
|---|
| $y(x) =$ |

**Question 7** On considère, sur l'intervalle $]0\,,\ 2[$ , l'équation différentielle

$$\sqrt{2x-x^2}\cdot y' + \left(\sqrt{2x-x^2}-1\right)\cdot y^2 = 0\ .$$

La solution de cette équation telle que $y(1) = 1$ est

| |
|---|
| $y(x) =$ |

**Question 8** Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = (x-y)^2 + (x-2)^2 + (x^2+1)y$ .

Calculer

| | |
|---|---|
| $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) =$ | $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) =$ |
| $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) =$ | $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) =$ |
| $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) =$ | |

Préciser la valeur des coordonnées et indiquer la nature (maximum, minimum, col ou point selle) des points stationnaires (ou critiques) de $f$ .

| | | | |
|---|---|---|---|
| $M_1\ (x_1, y_1) = (\quad , \quad )$ | Maximum □ | Minimum □ | Col □ |
| $M_2\ (x_2, y_2) = (\quad , \quad )$ | Maximum □ | Minimum □ | Col □ |
| $M_3\ (x_3, y_3) = (\quad , \quad )$ | Maximum □ | Minimum □ | Col □ |

**Question 9** On considère dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à la base canonique $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ les vecteurs $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ et $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, et on désigne par ($P$) le plan dont une base est $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\}$.

Les longueurs de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont $\boxed{\left\| \overrightarrow{OA} \right\| = \quad}$ $\boxed{\left\| \overrightarrow{OB} \right\| = \quad}$ .

Un vecteur $\overrightarrow{OC}$ orthogonal au plan ($P$) et de même longueur que $\overrightarrow{OA}$ s'écrit dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ : $\boxed{\overrightarrow{OC} = \quad}$ .

Soient $Q$ la matrice de passage de la base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ à la base $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$, $Q^t$ sa matrice transposée et $Q^{-1}$ sa matrice inverse. On a :

$$\boxed{Q = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}, \quad \boxed{Q \cdot Q^t = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}, \quad \boxed{Q^{-1} = \frac{\cdot}{\cdot}\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}$$

On considère maintenant la transformation géométrique $T$ qui associe à un point $M$ de l'espace le point $T(M)$ déduit du symétrique de $M$ par rapport au plan ($P$) en multipliant par 2 sa composante relative à $\overrightarrow{OC}$. On note respectivement $S'$ et $S$ les matrices représentant cette transformation géométrique relativement aux bases $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$ (départ et arrivée) et $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ (départ et arrivée).

On a

$$\boxed{S' = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}, \quad \boxed{S = \frac{\cdot}{\cdot}\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}.$$

Le point $M$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ dans $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ a pour image par $T$ le point $T(M)$ dont les coordonnées dans $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ sont $\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}}$ .

On en déduit que le point $M$ est tel que (cocher la ou les bonnes cases)

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\overrightarrow{OM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AC}$ | ☐ | $\overrightarrow{OM}$ est orthogonal au plan ($P$) | ☐ |
| $\overrightarrow{OM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AC}$ | ☐ | $M$ est sur le plan ($P$) | ☐ |