NOM : ....
Prénoms : ....

FORMATION INGÉNIEUR DE
L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES ARTS ET MÉTIERS,
SPÉCIALITÉ TRAVAUX PUBLICS
EN PARTENARIAT AVEC AFITP-PACA

Session avril 2016

Physique - Mécanique

Temps conseillé : 1h30
Mentionner votre nom en début de chaque page
Ne pas désagrapher le sujet

Épreuve sans document ni calculatrice

— Les réponses seront portées sur le présent document, dans les emplacements prévus à cet effet. En cas de besoin, des emplacements supplémentaires ont été prévus à la fin du document.
— Il est conseillé au candidat de prendre connaissance de l'intégralité du document avant de commencer à composer.
— La plupart des questions peuvent être traitées de façon indépendante.
— Le candidat devra préciser les hypothèses qu'il utilise pour la résolution des problèmes.
— La clarté et la propreté ainsi que la concision et la précision des réponses seront prises en compte pour l'évaluation.

On s'intéresse ici au dimensionnement d'une poutre, de longueur L et encastrée dans un mur en O, sur laquelle on veut installer un treuil (pont roulant en porte-à-faux). Soit P la position du treuil sur la poutre. On suppose que l'action du treuil sur la poutre peut être modélisée comme une action ponctuelle en P, de force F verticale descendante. On note ℓ la distance de P à l'encastrement, comme illustré en figure 1.

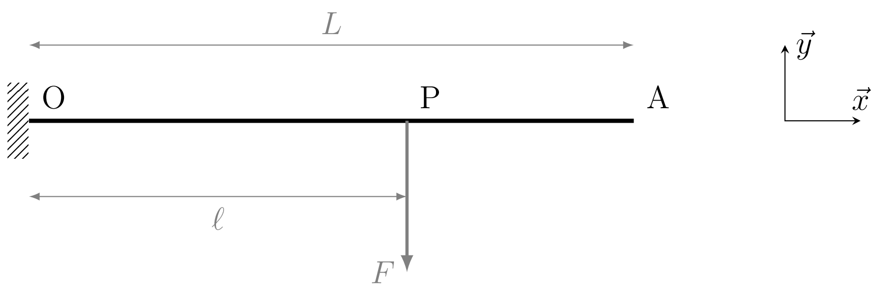


Figure 1 – Représentation 1D du problème étudié.

1 Configuration étudiée

On cherche à se placer dans le cas le plus défavorable, c'est-à-dire celui qui donne lieu à la flèche la plus grande et aux contraintes dans le matériau maximales.

1. Pour quelle valeur de ℓ la poutre est-elle la plus contrainte ? Redessiner dans cette configuration le schéma de la figure 1.

2. On note $\overrightarrow{R}$ la résultante de l'effort de réaction du mur sur la poutre et $\overrightarrow{M}_{\mathrm{O}}$ son moment en O. Évaluer dans cette configuration les valeurs de $\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{M}_{\mathrm{O}}$.

Soit M un point de la poutre et x sa coordonnée suivant $\vec{x}$. On note $\{\tau(x)\}$ le torseur de cohésion (ou torseur des efforts internes) de la poutre en M avec :

$$\{\tau(x)\} = \left\{ \begin{array}{c} N(x)\vec{x} + T_y(x)\vec{y} \\ M_{fz}(x)\vec{z} \end{array} \right\}_{\mathrm{M}} \tag{1}$$

3. Rappeler la définition du torseur de cohésion.

4. Détailler la signification des composantes N, T_y et M_{fz}.

5. Calculer les composantes du torseur de cohésion dans la configuration proposée en question 1.

2 Calcul des paramètres géométriques de la poutre

On souhaite utiliser pour la poutre un profilé avec une section en I (profilé dit « IPN »), comme illustré en figure 2. La section est constituée de deux parties horizontales, appelées semelles (S_1 et S_3) et d'une partie verticale (appelée âme). On note a et e respectivement la largeur et l'épaisseur de chacune de ses parties.

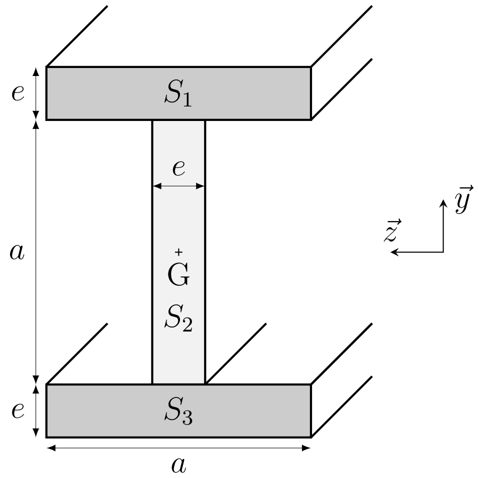


FIGURE 2 – Représentation de la section droite de la poutre utilisée (section en I)

1. Donner l'expression de la section droite totale (S) du profilé.

Le moment quadratique d'une section rectangulaire de base b et de hauteur h, calculé en un point P distant de d du centre de gravité est donné par la formule suivante (les notations sont illustrées sur la figure 3) :

$$I_{\mathrm{P}z} = \frac{bh^3}{12} + d^2bh \qquad (2)$$

2. On appelle G le centre d'inertie de la section droite S (voir figure 2). À l'aide de la formule précédente, calculer les moments quadratiques

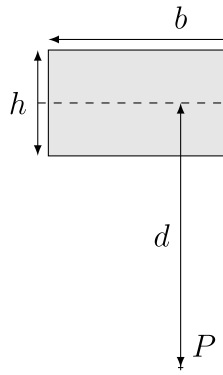


FIGURE 3 – Représentation des notations utilisées dans l'équation (2) pour le calcul du moment quadratique d'un rectangle

des sections S_1, S_2 et S_3 en G. En déduire le moment quadratique $I_{\mathrm{G}z}$ de S.

3 Calcul de la déformée

On suppose que le torseur de cohésion est le suivant :

$$\{\tau(x)\} = \left\{ \begin{array}{c} T_y\vec{y} \\ M_{fz}(x)\vec{z} \end{array} \right\}_M \quad \text{avec : } \left\{ \begin{array}{l} T_y = -F \\ M_{fz}(x) = F(x-L) \end{array} \right. \tag{3}$$

Soit $y(x)$ la flèche (déplacement suivant $\vec{y}$ en x). On fait l'hypothèse que les déformations de cisaillement sont négligeables par rapport aux déformations de flexion. On a donc la relation suivante :

$$EI_{\mathrm{G}z}y''(x) = M_{fz} \tag{4}$$

où E est le module de Young du matériau, $I_{\mathrm{G}z}$ le moment quadratique de la section droite (voir partie 2) et $y''(x)$ la dérivée seconde de y par rapport à x.

1. Déterminer l'expression de $y(x)$ en fonction de x (justifier le choix des constantes d'intégration).

On suppose que la flèche en A vaut alors :

$$y(L) = -\frac{FL^3}{3EI_{\mathrm{G}z}} \tag{5}$$

Avec :
— F=5000 N
— L=3 m
— E=200 GPa
— $I_{\mathrm{G}z}$=10×10^{-6} m^4

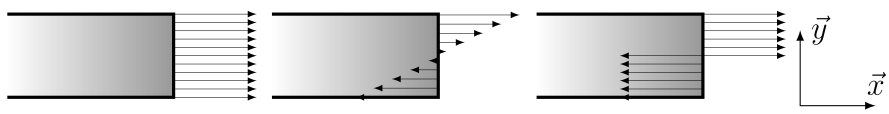
2. Calculer la valeur numérique de la flèche en A en précisant les unités.

4 Calcul de la contrainte

On cherche à déterminer si la section de la poutre est suffisante pour que le celle-ci ne plastifie pas. On se place dans le cas où la poutre est soumise à un effort de flexion exercé suivant $\vec{y}$.

1. Rappeler succinctement la notion de contraintes.

2. On ne s'intéresse ici qu'à la contrainte normale, notée σ_{xx}. La figure ci-dessous illustre trois profils de contrainte normale suivant l'épaisseur. Entourer celle qui vous semble la plus réaliste compte-tenu du chargement retenu et justifier votre choix.



3. En déduire l'expression de la contraintes normale maximale dans la section, en fonction du moment flechissant (M_{fz}), du moment quadratique (I_{Gz}) et des paramètres géométriques de la section droite (voir figure 2 page 5).

On suppose que :

$$\sigma_{xx}(x) = \frac{M_{fz}(x)}{I_{Gz}}\left(e + \frac{a}{2}\right) \tag{6}$$

4. En quelle position sur la poutre cette contrainte est-elle maximale ? Calculer son expression (on utilisera l'équation (3) page 7).

5. Calculer la valeur numérique avec :
   — F=5000 N
   — L=3 m
   — I_{Gz}=10×10^{-6} m^4
   — a=150 mm
   — b=5 mm

5 Dimensionnement d'un câble de renfort

On considère que la géométrie retenue (poutre en porte-à-faux) ne permet pas de supporter la charge nominale. On décide donc d'ajouter un câble de suspension vertical entre l'extrémité de la poutre A et le plafond, comme l'illustre la figure 4.

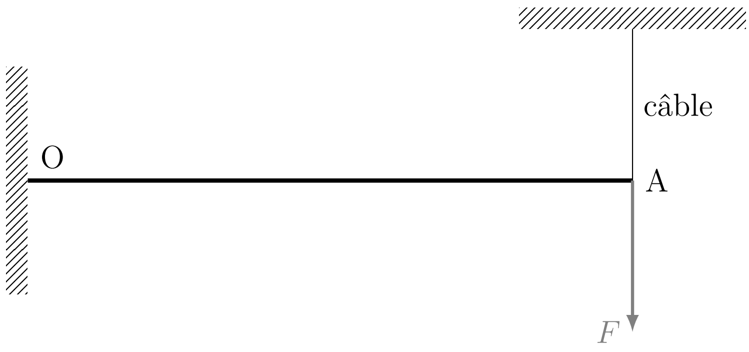


FIGURE 4 – Représentation schématique de la poutre et du câble de suspension.

1. Le système présenté vous semble-t-il isostatique ? Détailler.

On modélise l'action du câble sur la poutre comme une force verticale ascendante de norme T (tension du câble).

2. Redessiner le schéma de la figure 4 avec ce nouveau modèle.

Soit ε la déformation longitudinale du câble, E son module de Young (considéré égal à celui de la poutre) et σ la contrainte normale dans le câble.

3. Dans le cas de l'élasticité linéaire, rappeler l'expression liant ε et σ.

4. Soit ℓ la longueur initiale du câble. Donner l'expression de ε en fonction de la flèche en A, notée $u_y = -y(L)$

5. Soit S la section droite du câble. Déduire des questions précédentes l'expression de la tension T en fonction de u_y.

6. D'après le principe de superposition, déduire de l'équation (5) (page 8) la flèche en A en fonction de la charge F et de la tension T (on est toujours dans le cas où le treuil est en A).

7. En déduire l'expression de u_y en fonction de F, L, ℓ, E, $I_{\mathrm{G}z}$ et S.

8. Calculer enfin l'expression de la tension T du câble.

Compléments de réponse

NOM : ....